

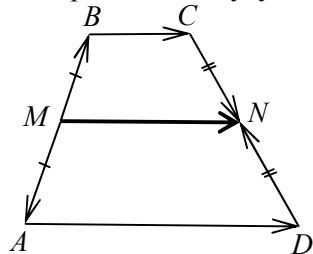
Теорема о средней линии трапеции

Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются её **основаниями**, а непараллельные стороны – **боковыми сторонами**.

На рисунке $ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$, BC и AD – основания, $AB \nparallel CD$, AB и CD – боковые стороны.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины её боковых сторон. На рисунке MN – средняя линия трапеции $ABCD$, так как $AM = MB$, $CN = ND$.

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.



Дано: $ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$,
 MN – средняя линия.

Доказать: $MN \parallel BC$, $MN \parallel AD$,
 $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

Доказательство

По правилу многоугольника сложения нескольких векторов $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ и $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$. Сложив эти равенства, получим $2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN})$.

По условию теоремы MN – средняя линия трапеции, поэтому M и N – середины сторон AB и CD , а \overrightarrow{MB} и \overrightarrow{MA} , \overrightarrow{CN} и \overrightarrow{DN} – противоположные векторы. Так как сумма противоположных векторов равна нулевому вектору, то $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$ и $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$. Следовательно, $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$, отсюда $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$.

Так как $\overrightarrow{BC} \uparrow \uparrow \overrightarrow{AD}$, то $\overrightarrow{MN} \uparrow \uparrow \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{MN} \uparrow \uparrow \overrightarrow{AD}$, а длина вектора $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ равна $BC + AD$. Отсюда следует, что $MN \parallel BC$, $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

Итак, средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме. **Ч.т.д.**